Plenarsitzungen

Wie man aus einer Orange zwei macht

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Thomas Sonar

Institut Computational Mathematics, Technische Universität Braunschweig,
Pockelsstraße 14, D-38106 Braunschweig

Einführung

Den meisten Menschen ist es nie aufgefallen; wenn sie zufällig davon hören, scheint es nicht interessant, es taucht im praktischen Leben nicht auf, und außerdem ist es Mathematik – also für die meisten sowieso Unfug: wir haben ein Problem bei der Bestimmung von Volumina von Körpern! Gemeint ist das **Inhaltsproblem**. Wenn wir das **Volumen** V von Dingen in dem uns umgebenden dreidimensionalen Raum messen wollen, dann erwarten wir doch mindestens die folgenden drei Dinge:

1. Wenn wir zwei Körper A und B betrachten, die voneinander verschieden sind, dann soll für das Volumen der Vereinigung $A \cup B$ von A und B, also der beiden Körper zusammengenommen

$$V(A \cup B) = V(A)+V(B)$$

gelten.

2. Wenn wir einen Körper A irgendwie durch Drehung oder Verschiebung bewegen, dann soll sich unser Volumen nicht ändern. Ist also β eine solche Bewegung, dann soll

$$V(\beta(A)\ ) = V(A)$$

gelten.

3. Für den Einheitswürfel $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ soll das Volumen genau Eins sein, d.h. es soll

$$\mathrm{V}([0,1]\times[0,1]\times[0,1]) = 1$$

gelten.

---

* Der Vortrag wurde am 11.01.2014 vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen gesellschaft gehalten.

Das scheint doch nicht zu viel verlangt, oder? Fassen wir die Volumenberechnung etwas mathematischer auf. Wir sprechen nicht von Körpern im uns umgebenden dreidimensionalen Raum, sondern von **Mengen** im n-dimensionalen Raum, dem $\mathbb{R}^n$. Wir sprechen dann auch nicht vom Volumen, sondern vom **Inhalt**. Damit können wir das **Inhaltsproblem**[1] wie folgt beschreiben:

Inhaltsproblem. Wir suchen auf allen nur möglichen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Inhaltsfunktion V mit den folgenden drei Eigenschaften:

1. *Endliche Additivität*: Für alle $A, B \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt

$$V(A \cup B) = V(A) + V(B).$$

2. *Bewegungsinvarianz*: Für jede Bewegung β und für alle $A \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$V(\beta(A)) = V(A).$$

3. Normierung: $V([0,1]^n) = 1$.

Der Fall n=3 führt uns direkt wieder zurück auf unsere Anforderungen an die Volumenfunktion im dreidimensionalen Raum; wir haben also die Volumenfunktion nur verallgemeinert. Es scheint nun sehr seltsam zu sein, mindestens aber

Abb 1. Felix Hausdorff.

1 J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie. Springer Verlag, 6te Auflage 2009.

merkwürdig, dass das Inhaltsproblem in Räumen der Dimension 3 oder größer keine Lösung besitzt, d.h. wir finden so eine Inhaltsfunktion V einfach nicht! Dieses negative Ergebnis hat der große Felix Hausdorff (8.11.1868–26.1.1942) im Jahr 1914 bewiesen[2].

Aber funktioniert es denn im Ein- oder Zweidimensionalen? Ja, aber nicht gut, denn im Jahr 1923 konnte der nicht weniger große Stefan Banach (30.3.1892–31.8.1945) beweisen, dass das Inhaltsproblem für n=1 und n=2 zwar lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist! Wir finden also nicht nur genau eine Volumenfunktion, sondern mehrere verschiedene, und das ist doch recht unangenehm.

Abb 2. Stefan Banach.

Hier gibt es also offenbar ein Problem! Worin liegt es? Offenbar können wir nicht „alle nur möglichen" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen und diese wichtige Erkenntnis liegt der modernen Maßtheorie zu Grunde. Es gibt also offenbar Mengen im dreidimensionalen Raum, denen wir kein Volumen zuordnen können! Wie solche Mengen aussehen, wollen Sie – falls Sie nicht Mathematiker sind – gar nicht wissen, denn solche Mengen sind wirklich Monstrositäten. Läßt man solche Monstrositäten jedoch zu, dann kommt man zu ganz verwunderlichen Aussagen, zum Beispiel

2 F. Hausdorff: Bemerkungen über den Inhalt von Punktmengen. (Math. Annalen 75, 428–433, 1914).

zum **Banach-Tarski-Paradoxon**[3]. Alfred Tarski (14.1.1901–26.10.1983) war ein berühmter Logiker und Mathematiker. Nach diesem Paradoxon ist es möglich, eine Orange in endlich viele Teile zu zerschneiden, diese Teile zu drehen und zu verschieben, und danach zu zwei Orangen zusammenzusetzen!

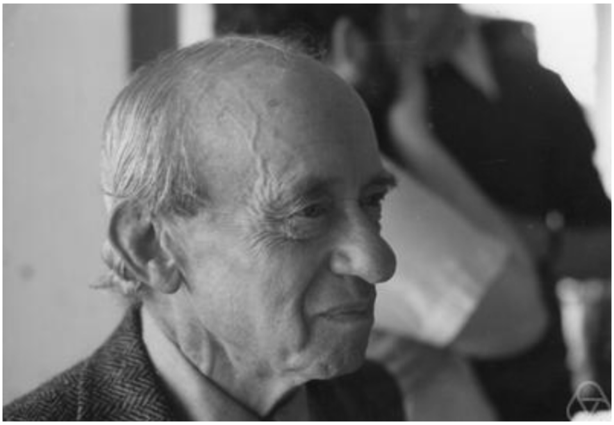


Abb 3. Alfred Tarski.

Mächtigkeiten

Abzählbar und überabzählbar

Um dem Banach-Tarski-Paradoxon näher zu kommen, müssen wir uns vorher ein wenig mit dem Unendlichen beschäftigen. Keine Angst, das ist ganz einfach. Wir fragen uns also, wie viele natürliche Zahlen 1, 2, 3, ... es gibt. Da wir keine direkte Anzahl angeben können, spricht der Mathematiker auch nicht von „wie viele“, sondern von der **Mächtigkeit** der natürlichen Zahlen. Da wir immer weiter zählen können (jedenfalls im Prinzip), ist die Mächtigkeit sicher unendlich; wir nennen diese Unendlichkeit **abzählbar**, da wir ja immer weiter zählen können. Jede andere Menge, die wir mit Hilfe der natürlichen Zahlen eindeutig und vollständig nummerieren, also abzählen, können, heißt ebenfalls abzählbar. Es ist eine alte Einsicht, die Galileo Galilei schon 1638 beschrieben hat, dass die geraden Zahlen abzählbar sind. Das sieht man an der Nummerierung

[3] S. Banach, A. Tarski: Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. (Fundamenta Mathematicae 6, 244–277, 1924).)

1	2	3	4	5	6	7	8	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...

wobei der Doppelpfeil andeuten soll, dass wir eine eindeutige Zuordnung aller geraden Zahlen zu den natürlichen Zahlen finden können.
Das geht natürlich auch genau so gut mit den ungeraden Zahlen, so dass alle natürlichen Zahlen, die geraden natürlichen Zahlen und die ungeraden natürlichen Zahlen **dieselbe Mächtigkeit** besitzen[4].

Wir betrachten nun die Menge aller Brüche, die rationalen Zahlen. Ganz offensichtlich gibt es sehr viel mehr rationale Zahlen als natürliche! So liegen schon zwischen 1 und 2 unendlich viele rationale Zahlen (1+1/2, 1+1/3, 1+1/4, ...) und wir dürfen hoffen, hier nun eine größere Mächtigkeit als die der natürlichen Zahlen zu finden. Aber weit gefehlt! Auch die rationalen Zahlen sind abzählbar, und das sieht man wie folgt. Schreibe zeilenweise alle Brüche hin. In der ersten Zeile stehen alle Brüche mit Nenner 1, in der zweiten Zeile alle mit Nenner 2, usw. Dann geben wir der ersten Zahl oben links in diesem Tableau die Nummer 1, das ist die rationale Zahl 1/1. Nun gehen wir nach rechts zur Zahl 2/1; sie bekommt die Nummer 2. Gehen wir diagonal nach links eine Zeile tiefer, finden wir die Zahl 1/2, die die Nummer 3 erhält. Nun eine Etage tiefer zur Zahl 1/3, die die Nummer 4 bekommt. Schräg nach rechts hoch zur Zahl 2/2, die keine Nummer bekommt, weil wir die 1 schon nummeriert haben. Noch eine Zeile nach rechts oben zur Zahl 3/1, die die Nummer 5 erhält, usw. So laufen wir in einem typischen Muster durch unser Tableau und können jeder rationalen Zahl eine eindeutig bestimmte Nummer geben. Damit ist aber gezeigt, dass die (positiven) rationalen Zahlen abzählbar sind. Es ist nun leicht zu sehen, dass wir auch jedesmal die jeweils negative rationale Zahl hätten einschieben können – immer noch hätten wir für alle Brüche eine eindeutige Nummer gehabt. Die rationalen Zahlen sind also tatsächlich abzählbar, d.h. **die Brüche und die natürlichen Zahlen sind gleichmächtig**.

Nun beschleicht uns vielleicht der Verdacht, dass es nur abzählbar unendliche Mengen gibt, aber dem ist nicht so. Betrachten wir nämlich die reellen Zahlen, d.h. alle rationalen Zahlen (Brüche) und die irrationalen Zahlen, die sich nicht als Brüche darstellen lassen, z.B. $\sqrt{2}$, π, e, usw., dann haben wir eine nicht abzählbare Menge gefunden! Es gibt also „viel, viel mehr“ irrationale Zahlen als rationale Zahlen! Wie sieht man das? Mit einem Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, dass

---

4 O. Dieser: Einführung in die Mengenlehre. Springer Verlag, 3te Auflage 2010.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \longrightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \longrightarrow & \frac{6}{1} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \cdots & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

die reellen Zahlen doch abzählbar seien und dann konstruieren wir einen Widerspruch. Dazu reicht es, wenn wir uns die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ansehen. Wir nehmen also an, wir könnten die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählen. Dann könnten wir eine Nummerierung finden, die am Anfang vielleicht so aussieht:

Nummer	Reelle Zahl
1	0.0000000000...
2	0.1976354235...
3	0.4387698675...
4	0.7679456579...
5	0.5000000000...
...	...

Nun konstruieren wir eine neue reelle Zahl aus dieser Abzählung. Sie soll ebenfalls zwischen 0 und 1 liegen, daher beginnt die neue Zahl mit z=0. ... . Die erste Nachkommastelle der neuen Zahl soll nun die erste Nachkommastelle der Zahl mit der Nummer 1 aus unserer Abzählung sein, wobei wir 1 addieren. In unserem Fall ergibt sich z = 0.1 ..., weil die erste Nachkommastelle der ersten Zahl in der Liste gerade eine 0 war. Nun zur zweiten Nachkommastelle, die wir aus der zweiten Nachkommastelle der Zahl Nummer 2 gewinnen, indem wir wieder 1 addieren. Die zweite Nachkommastelle der zweiten Zahl ist eine 9, dazu eine 1 addiert soll 0 ergeben. Wir haben also jetzt z bis auf zwei Nachkommastellen bestimmt: $z = 0.10$ ... . Nun ist das Rezept klar: Die dritte Nachkommastelle von z ist die dritte Nachkommastelle der dritten Zahl und dazu 1 addiert, und so fort. Wir erhalten so eine Zahl

$$z = 0.10901\ldots\ ,$$

und diese Zahl kann nicht in unserer Liste sein! Denn z ist sicher nicht die erste Zahl, da sie sich von ihr (mindestens) in der ersten Nachkommastelle unterscheidet. Unser z kann auch nicht die zweite Zahl sein, da sie sich (mindestens) in der zweiten Nachkommastelle unterscheidet, und so weiter. Unter der Annahme, wir könnten alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählen haben wir eine neue reelle Zahl zwischen 0 und 1 gewonnen, die keine Nummer bekommen hat! Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme gefunden und wir müssen festhalten: **Die reellen Zahlen sind von überabzählbar unendlicher Mächtigkeit**.

Verschieben und Stopfen von Löchern

Mit dem Begriff des Unendlichen sind ein paar ganz erstaunliche Tricks[5] möglich. Betrachten wir ein nach dem großen David Hilbert (23.1.1862-14.2.1943) benanntes Hotel. Dieses Hotel hat abzählbar unendlich viele Zimmer mit den Zimmernummern 1, 2, 3, 4, 5, ... Die Saison läuft gut, denn alle Zimmer sind belegt. Da kommt ein neuer Gast, aber Hilbert kann ihn problemlos aufnehmen! Das macht er mit Hilfe des Tricks **Verschieben ins Unendliche**: Der Gast in Zimmer 1 zieht um in Zimmer 2. Der Gast aus Zimmer 2 muss jetzt ins Zimmer 3, der aus Zimmer 3 ins Zimmer 4, und so weiter. Damit sind weiterhin alle Gäste untergebracht, aber Zimmer 1 ist frei für den neuen Gast!

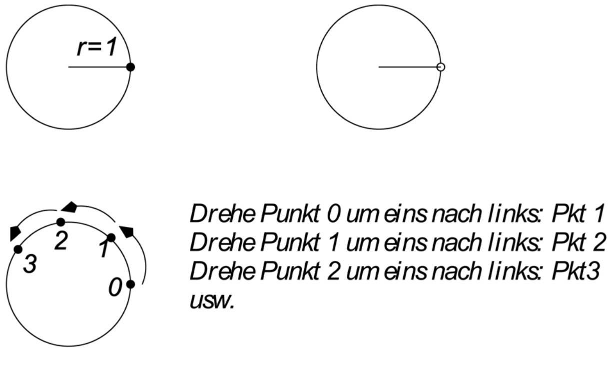
Nun kommt ein Reisebus mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen. Auch hier hat Hilbert keine Probleme, alle diese neuen Gäste aufzunehmen, ohne die alten Gäste rauszuwerfen! Wieder ist der Trick **Verschiebung ins Unendliche**. Der Gast aus Zimmer Nummer n zieht in das Zimmer mit der Nummer $2n$. Das heißt, der Gast aus Zimmer 1 zieht ins Zimmer 2, der aus Zimmer 2 ins Zimmer 4, der Gast aus Zimmer 3 ins Zimmer 6, der aus Zimmer 4 ins Zimmer 8, und so weiter. Alle alten Gäste bewohnen nun Zimmer mit geraden Nummern, alle Zimmer mit ungeraden Nummern sind frei und können von der Busgesellschaft belegt werden!

---

5 L.M. Wapner: Aus 1 mach 2 – Wie Mathematiker Kugeln verdoppeln. Springer-Spektrum Verlag 2008.

Nun zieht der Gast aus Zimmer 7 aus. Hilbert mag es gar nicht, dass nun ein Zimmer leer steht, und so wendet er den Trick **Stopfen von Löchern** (=leeren Zimmern) **aus dem Unendlichen** an. Der Gast aus Zimmer 8 zieht ins Zimmer 7, der aus Zimmer 9 ins Zimmer 8, der aus Zimmer 10 ins Zimmer 9, und so weiter. Gast n zieht also ins Zimmer n-1 für alle n, die größer oder gleich 8 sind. Damit sind wieder alle Zimmer belegt und Hilbert ist glücklich.

Verschieben und Stopfen von Löchern geht natürlich mindestens genau so gut, wenn man mit überabzählbar unendlichen Mengen arbeitet. Dazu sehen wir uns einen Kreis mit Radius 1 an, bei dem wir einen Punkt ins Unendliche verschieben wollen. Der Umfang unseres Kreises ist 2π, also eine irrationale Zahl. Auf dem Kreisumfang betrachten wir einen Bogen, der genau eine Längeneinheit (z.B. 1 cm) lang sein soll. Den zu verschiebenden Punkt nennen wir Punkt 0 und schieben ihn nun auf dem Umfang um eine Längeneinheit entgegen dem Uhrzeiger. Dann landet Punkt 0 auf Punkt 1. Den alten Punkt 1 schieben wir eine Längenheit weiter, und er kommt auf Punkt 2 zu liegen, den wir wieder eine Längeneinheit weiter bewegen, und so weiter. Weil der Umfang des Kreises irrational ist, kommt keiner der Punkte 0, 1, 2, 3, ... jemals an die alte Stelle eines der anderen Punkte aus dieser Liste und bei Punkt 0 bleibt ein Loch. Wir haben den Punkt 0 freigemacht durch Verschiebung ins Unendliche. Man sagt, der Kreis mit Loch und der Kreis ohne Loch sind **zerlegungsgleich**, d.h. dass im Kreis mit Loch kein einziger Punkt des Kreises ohne Loch fehlt; er ist nur ins Unendliche verschoben worden.



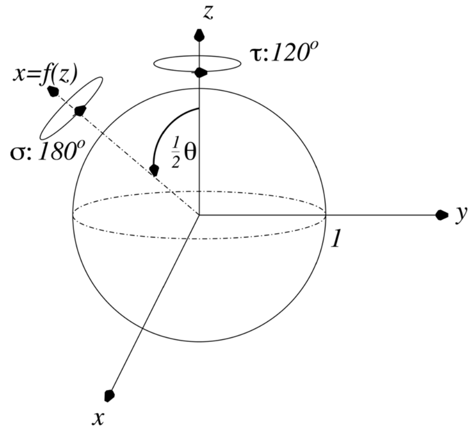
Nun kann man dieses Spiel auch mit anderen Mengen ausführen, z.B. mit einer Kreisfläche, aus der man einen ganzen Radius ins Unendliche verschiebt, oder mit einer Kugel, aus der man einen Punkt verschiebt. Natürlich können wir diese Löcher auch wieder aus dem Unendlichen stopfen, ganz so, wie in Hilberts Hotel.

Das Hausdroff-Paradoxon

Ganz grundlegend für uns ist das Hausdorff-Paradoxon, nach dem wir die Sphäre, also die Oberfläche einer Kugel, in endlich viele Teile zerlegen können, diese Teile dann durch Rotationen oder Verschiebungen bewegen, um sie letztlich zu zwei Sphären (gleichen Durchmessers!) zusammensetzen zu können. Wir brauchen dazu nur zwei Drehungen zu definieren.

Zwei Drehungen

Wir betrachten eine Sphäre vom Radius 1 im dreidimensionalen Raum.



Die Drehachsen unserer beider Drehungen sind die z-Achse und eine Achse in der (x,z)-Ebene, die gegen die z-Achse um den Winkel 1/2 θ geneigt ist. Wir dürfen $\theta = 90°$ annehmen[6] und definieren nun die Drehachse als Funktion $x = f(z)$. Unsere erste Drehung um die z-Achse heiße τ und sei eine Drehung im mathematisch positiven Sinne (d.h. gegen den Uhrzeiger) um den Winkel 120°. Die Drehung um die Achse $x = f(z)$ heiße σ und soll 180° gegen den Uhrzeiger betragen. Wenn wir zwei Mal mit τ drehen, wollen wir an Stelle von τ τ einfach τ^2 schreiben. Wenn wir mit σ zwei Mal drehen, dann haben wir eine volle 360°-Drehung vollführt, wir sind also wieder am Startpunkt der Drehung angekommen und haben eigentlich nichts gemacht. Diese Drehung wollen wir die Identität I nennen, d.h. $\sigma^2 = I$. Ebenso ist $\tau^3 = I$, denn dreimaliges Drehen um jeweils 120° resultiert ebenfalls in

6 S. Wagon: The Banach-Tarski-Paradox. Cambridge University Press, 1985, S.16.

einer vollen Drehung. Unsere Drehungen können wir beliebig oft hintereinander ausführen, zum Beispiel erst σ und dann zwei Mal τ, was auf die Gesamtdrehung $\tau^2\sigma$ führt. Wir wollen verabreden, dass wir alle unseren Drehungen stets so weit wie möglich reduzieren, zum Beispiel

$$\tau^4\sigma^3\ \tau = \tau^3\tau\sigma^2\tau = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau.$$

Wie viele verschiedene Drehungen können wir überhaupt ausführen? Da wir jede Drehung mit einer Nummer versehen können, sind es offenbar abzählbar unendlich viele. Diese wollen wir in die drei Klassen G_1, G_2 und G_3 einordnen, die wir nun konstruieren müssen. Dazu geben wir folgenden Anfang einer Tabelle vor:

G_1	G_2	G_3
I	σ, τ	τ^2

Gehen wir nun davon aus, wir hätten bereits eine Drehung, zum Beispiel $\alpha \coloneqq \sigma\tau\sigma\tau^2$, in die Tabelle eingefügt. Wohin soll dann eine Drehung, wenn noch ein σ hinzukommt, also wohin kommt σα? Wohin kommt dann τα und wohin sollen wir $\tau^2\ \alpha$ einsortieren? Dazu geben wir den folgenden Algorithmus in Tabellenform:

	falls $\alpha \in G_1$	falls $\alpha \in G_2$	falls $\alpha \in G_3$
falls linkes Zeichen von α ein τ oder τ^2 ist	$\sigma\alpha$ nach G_2	$\sigma\alpha$ nach G_1	$\sigma\alpha$ nach G_1
falls linkes Zeichen von α ein σ ist	$\tau\alpha$ nach G_2	$\tau\alpha$ nach G_3	$\tau\alpha$ nach G_1
falls linkes Zeichen von α ein σ ist	$\tau^2\alpha$ nach G_3	$\tau^2\alpha$ nach G_1	$\tau^2\alpha$ nach G_2

Wir müssen uns jetzt fragen, ob alle Drehungen in den drei Klassen wirklich voneinander verschieden sind. Es darf offenbar keinesfalls der Fall auftreten, dass eine Kette von Drehungen durch eine weitere zur Identität wird. Hausdorff hat erkannt[7], dass das ganz und gar von der Wahl des Winkels θ abhängt und gefolgert, dass dieser Winkel „transzendent irrational“ sein muss. Damit wäre unsere Wahl von θ = 90° unzulässig, aber Osofsky hat gezeigt, dass die Vorsicht Hausdorffs unbegründet war und das alles noch mit θ = 90° funktioniert[8]. Wir können also beruhigt sein: Unsere Tabelle aller abzählbar unendlich vielen Drehungen enthält wirklich nur voneinander verschiedene Drehungen.

---

7 F. Hausdorff: Bemerkungen über den Inhalt von Punktmengen. (Math. Annalen 75, 428–433, 1914).

8 S. Wagon: The Banach-Tarski-Paradox. Cambridge University Press, 1985, S.16.

Nun brauchen wir noch einen Satz, der sich durch einfache Überlegungen beweisen läßt.

Satz:

1. Man erhält alle Drehungen in G_2, wenn man auf die Drehungen in G_1 noch einmal die Drehung τ anwendet.

2. Man erhält alle Drehungen in G_3, wenn man auf die Drehungen in G_1 noch einmal die Drehung τ^2 anwendet.

3. Man erhält alle Drehungen in G_2 oder G_3, wenn man auf die Drehungen in G_1 noch einmal die Drehung σ anwendet.

Diesen Satz können wir auch kürzer in der Form

$$\tau G_1 = G_2,$$
$$\tau^2 G_1 = G_3,$$
$$\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$$

schreiben.

Beweis: Wir beweisen nur den ersten Zusammenhang; die beiden anderen kann man sich ganz analog überlegen. Wir zeigen $\tau G_1 = G_2$, indem wir $\alpha \in G_1 \Leftrightarrow \tau\alpha \in G_2$ beweisen.

Setzen wir im ersten Schritt voraus, dass das erste Zeichen ganz links von α ein σ ist. Dann gibt es in unserem Algorithmus in Tabellenform genau eine Möglichkeit für $\tau\alpha$, nämlich $\tau\alpha$ geht nach G_2. Damit ist schon

$$\alpha \in G_1 \Rightarrow \tau\alpha \in G_2$$

gezeigt. Nun zeigen wir noch die andere Richtung, $\tau\alpha \in G_2 \Rightarrow \alpha \in G_1$. Es sei also $\tau\alpha \in G_2$ und wir müssen herausfinden, wie das nach G_2 gekommen ist. Nach unserem Algorithmus in Tabellenform gibt es dafür zwei Möglichkeiten, wenn das Zeichen ganz links in α ein σ ist, nämlich einmal $\alpha \in G_3$, dann würde $\tau^2\alpha$ nach G_2 führen, aber wir haben hier nur ein $\tau\alpha$. Also kommt nur der zweite Weg in Frage, in dem $\tau\alpha$ nach G_2 führt, wenn $\alpha \in G_1$. Damit ist $\tau\alpha \in G_2 \Rightarrow \alpha \in G_1$ gezeigt und insgesamt haben wir bewiesen: Wenn das linke Zeichen in α ein σ ist, dann gilt

$$\alpha \in G_1 \Leftrightarrow \tau\alpha \in G_2.$$

Nun müssen wir noch beweisen, dass $\tau G_1 = G_2$ ist, wenn das ganz linke Zeichen in α ein τ ist, aber das geht ganz analog und wir verzichten darauf.

Die Hausdorff'sche paradoxe Sphärenzerlegung

Nun können wir unser eigentliches Ziel angehen: Die paradoxe Zerlegung der Sphäre nach Hausdorff. Dazu überlegen wir uns, dass jede unserer Drehungen aus G_1, G_2, G_3 genau zwei Pole hat, das sind dir Durchstoßpunkte der jeweiligen Drehachse durch die Sphäre. Pole haben die Eigenschaft, dass sie bei einer Drehung an der gleichen Stelle bleiben. Da es nur abzählbar unendlich viele Drehachsen gibt, gibt es also nur abzählbar unendlich viele Pole. Die Menge der Pole wollen wir P nennen, die Menge der Punkte auf der Sphäre S. Da die Menge P abzählbar unendlich ist, die Menge S jedoch überabzählbar unendlich, ist die Differenzmenge

$$S \setminus P$$

(lies: „S ohne P") sicher überabzählbar. Dreht man einen Punkt aus $S \setminus P$ mit Hilfe einer der Drehungen aus G_1, G_2, G_3 auf einen anderen Punkt in $S \setminus P$, dann liegen diese beiden Punkte auf einer gemeinsamen Umlaufbahn auf der Sphäre. Wie viele solcher Umlaufbahnen gibt es auf der Sphäre? Schon eine einzige Drehung erzeugt überabzählbar viele Umlaufbahnen, da überabzählbar unendlich viele Punkte gedreht werden. Es gibt also sicher überabzählbar unendlich viele Umlaufbahnen. Nun benutzen wir ein schweres Geschütz, das **Auswahlaxiom**: Aus jeder überabzählbar unendlichen Menge können wir ein Element auswählen. Warum nicht? Aus 10 Säcken Kartoffeln können wir sicherlich auswählen und aus jedem Sack genau eine Kartoffel nehmen. Ja, aber der Sack Kartoffeln enthält eine endliche Menge! Es ist überhaupt nicht klar, dass eine solche Auswahl auch bei unendlichen Mengen funktioniert. Daher ist das Auswahlaxiom nur ein Axiom, das heißt, es handelt sich nicht um eine beweisbare Aussage! Auf Basis des Auswahlaxioms konstruieren wir uns nun eine neue überabzählbar unendliche Menge C auf folgende Weise:

Wir nehmen aus jeder Umlaufbahn genau einen Punkt und nennen die überabzählbar unendliche Menge dieser Auswahlpunkte *C*.

Was wissen wir über die Menge C?

1. C ist überabzählbar unendlich.

2. C und P haben keinen Punkt gemeinsam.

3. Kein Punkt in C kann durch eine der Drehungen in G_1, G_2, G_3 auf einen anderen Punkt in C gedreht werden.

4. Wendet man auf jeden Punkt von C jede Drehung in G_1, G_2, G_3 an, erhält man $S \setminus P$.

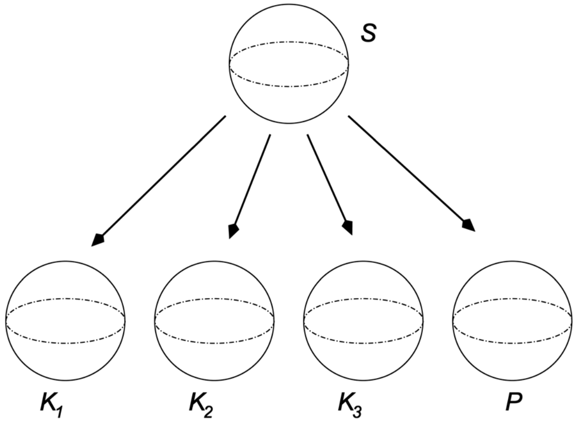
Nun schauen wir ganz genau hin! Wenden wir jede Drehung in G_1 auf C an, dann wollen wir die so entstehende Menge K_1 nennen. Ganz analog sollen K_2 und K_3 entstehen. Wir schreiben kurz:

$$K_1 = G_1C,$$
$$K_1 = G_2C,$$
$$K_3 = G_3C.$$

Damit haben wir die ganze Sphäre in vier Mengen zerlegt:

$$S = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup P,$$

und die vier Mengen sind diskunkt, das heißt sie haben paarweise keine Elemente gemeinsam.



Nun müssen wir uns an den wichtigen Zusammenhang zwischen den Drehungen in G_1, G_2, G_3 erinnern, aus denen sofort

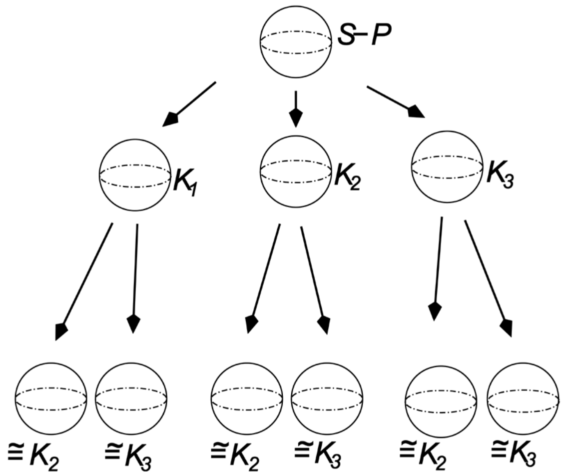
$$\tau K_1 = K_2$$
$$\tau^2 K_1 = K_3$$
$$\sigma K_1 = K_2 \cup K_3$$

folgt. Damit sind die Mengen K_1 und K_2 aber kongruent, denn die eine entsteht aus der anderen durch eine einfache Dehung. Auch K_1 und K_3 sind kongruent, und K_1 ist kongruent zu der Vereinigungsmenge $K_2 \cup K_3$. Schreiben wir „kongruent“ als $\cong$, dann ist

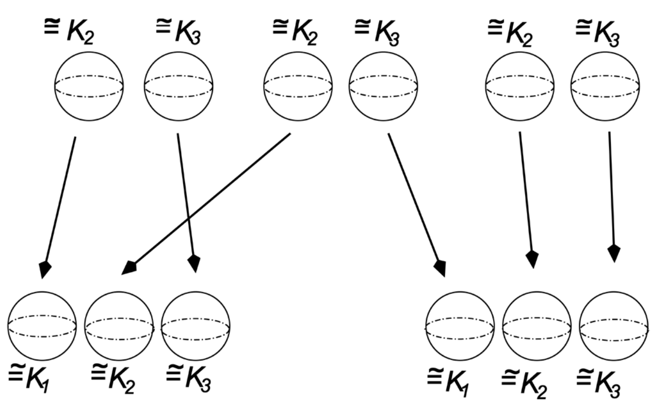
$$K_1 \cong K_2 \cong K_3 \cong K_2 \cup K_3.$$

Und hier lauert etwas, dass man auch „Drittel-Hälfte-Dilemma“ nennt. Wenn $K_1 \cong K_2 \cong K_3$ gilt, dann sollte jedes der K_i auch etwa 1/3 der Sphäre ausmachen, aber weil auch $K_1 \cong K_2 \cup K_3$ gilt, macht K_1 offenbar schon die Hälfte der Späre aus!

Wir haben jetzt offenbar sechs Teilmengen gefunden, die die Sphäre ausmachen, wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die Menge der Pole P weggelassen haben.



Jetzt sind wir fast fertig! Wegen der Kongruenzen $K_1 \cong K_2 \cong K_3$ können wir die sechs Mengen noch wie folgt umordnen.



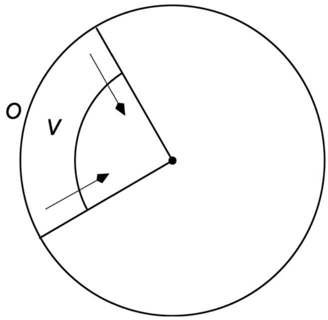
Jeder der beiden Dreierblöcke ist aber nun unsere ganze Sphäre (ohne die Pole), denn

$$S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3.$$

Wir haben damit zwei Kopien der Sphäre hergestellt, allerdings noch ohne Pole. Die können wir aber leicht durch Verschiebung aus dem Unendlichen stopfen, denn es sind ja nur abzählbar unendlich viele.

Das Banach-Tarski-Paradoxon

Den genauen Beweis, wie man aus einer ganzen Orange zwei macht (und nicht nur aus der Schale) müssen wir schuldig bleiben, aber wir können doch klar machen, wie wir vorzugehen haben.



Ausgehend von der Sphäre „verdicken" wir in Richtung auf den Mittelpunkt der Kugel, wobei wir gerade den Mittelpunkt freilassen (im Mittelunkt würden alle Punkte der Sphäre zusammenfallen!). So können wir uns K_1, K_2, K_3 zu, sagen wir, κ_1, κ_2, κ_3 verdickt denken. Den fehlenden Mittelpunkt der Kugel können wir dann wieder durch Stopfen aus dem Unendlichen füllen. Ebenso verfahren wir mit den Polen auf der Sphäre. Damit haben wir zwei identische Kopien der Ausgangskugel erhalten!

Ist das ein Witz?

Habe ich Sie hereingelegt? Sind Sie irgendwo aufs Glatteis geführt worden und haben Sie einen fatalen Fehler übersehen? Nein! Wir haben das zu Anfang diskutierte Inhaltsproblem wirklich und das Banach-Tarski-Paradoxon ist tatsächlich real. Die Paradoxie löst sich auf, wenn wir auf das Auswahlaxiom verzichten würden. In der Tat hat der berühmte Logiker Kurt Gödel (28.4.1906–14.1.1978) im Jahr 1938 bewiesen, dass das Auswahlaxiom nicht im Widerspruch zur Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre steht. Paul Cohen (2.4.1934–23.3.2007) hat 1963 gezeigt, dass auch das Gegenteil, also die Annahme, das Auswahlaxiom gelte nicht, widerspruchsfrei ist. Damit gibt es zwei Mathematiken: Eine, in der das Auswahlaxiom gilt, und eine andere, in der es nicht gilt. Verzichtet man aber auf das Auswahlaxiom, dann bricht eine ganze Menge sehr brauchbarer Mathematik weg. Also hat sich die überwältigende Mehrheit der Mathematiker entschlossen, das Auswahlaxiom zu akzeptieren.

Die berechtigte Frage der Praktiker, ob denn nun in der Küche tatsächlich die Verdoppelung einer Orange (oder eines Goldbarrens!) gelingen kann, müssen wir leider verneinen. Solche Mengen, wie wir sie für das Banach-Tarski-Paradoxon verwendet haben, haben ja noch nicht einmal ein Volumen. Solche Stücke sind mit Hilfe eines Küchenmessers einfach nicht aus einer Orange herauszuschneiden!